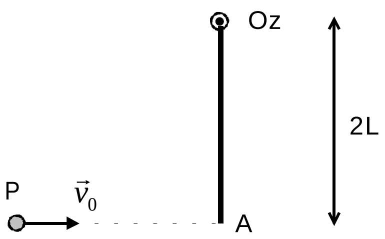
-EXERCICE 17.6-

• ENONCE :

« Incrustation d'un projectile dans une barre oscillante »



Une barre (longueur 2L, masse M) peut osciller sans frottements autour de l'axe Oz, tout en restant dans un même plan vertical.
Initialement, la barre est verticale et immobile.
Un projectile P (assimilé à un point matériel de masse m) est animé d'une vitesse perpendiculaire à OA; à t=0, il vient "s'incruster" dans la barre au niveau de l'extrémité A: il devient alors solidaire de celle-ci.

Déterminer l'angle maximal que fera la barre avec la verticale (on distinguera 2 cas en fonction de la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$).

On donne : $J = \dfrac{4ML^2}{3}$ = moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe Oz.

Rq : on notera bien qu'à t=0, le choc entre les 2 objets n'est pas élastique.

 Christian MAIRE

EXERCICE D'ORAL **MECANIQUE DU SOLIDE**

• CORRIGE :

« Incrustation d'un projectile dans une barre oscillante »

1) **Analyse du problème :**

• A partir de $t=0^+$, le mouvement est une rotation pure, à **un seul degré de liberté**, avec une vitesse de rotation notée $\omega_0=\omega(0^+) \Rightarrow$ nous choisirons un théorème **énergétique** (préféré au TMC, car il ne fera intervenir qu'une dérivée première de l'angle θ); la liaison en O étant parfaite, il suffira de prendre en compte le poids, qui est une force **conservative** $\Rightarrow$ nous utiliserons la **conservation de l'énergie mécanique**.

Deux cas peuvent se produire :

♦ si la vitesse ω_0 est suffisante, le mouvement ultérieur sera **révolutif** et l'angle maximal vaudra π (en valeur absolue).

♦ en-dessous d'un certain seuil pour ω_0, le mouvement sera **oscillant** (et harmonique pour les petites oscillations, mais ceci n'est pas demandé ici…), avec : $\theta_M \prec \pi$.

• Entre 0^- et 0^+, il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique, le choc étant **mou** ; on ne peut envisager la conservation de la quantité de mouvement, car la force exercée par l'axe Oz, autour duquel est articulée la barre, pour « retenir » cette dernière n'est pas connue (elle dépend de la « manière » dont s'incruste le projectile).

En revanche, la liaison étant sans frottements, cela signifie en particulier que le moment des forces de contact au niveau de l'axe, **projeté sur cet axe**, est **NUL** ; à t=0, le poids passant par l'axe Oz, son moment sera également **nul** : l'application du TMC entre 0^- et 0^+ conduit à la **conservation du moment cinétique scalaire**.

2) **Résolution du problème :**

• à $t=0^-$, seul le projectile est en mouvement $\Rightarrow \sigma_z(0^-)=(\overrightarrow{OP}\wedge m\vec{v}_0)\cdot\vec{e}_z=2mLv_0$

à $t=0^+$: $\sigma_z(0^+)=J\omega_0+[\overrightarrow{OA}\wedge m(2L\omega_0)\vec{e}_x]\cdot\vec{e}_z=4L^2(m+\frac{M}{3})\omega_0=\sigma_z(0^-)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega_0=\frac{3m}{3m+M}\times\frac{v_0}{2L}}$

• Energie cinétique : $E_C=\frac{1}{2}J\omega^2(t)+\frac{1}{2}m(2L\omega)^2=2L^2(m+\frac{M}{3})\omega^2(t)$ (avec : $\omega(t)=\dot{\theta}(t)$)

Energie potentielle : $E_P=MgL(1-\cos\theta)+2mgL(1-\cos\theta)=(M+2m)gL(1-\cos\theta)$

(l'origine est prise en $\theta=0$; pour la barre, c'est la position du centre d'inertie qui intervient) $\Rightarrow$

$E_{méca}=E_C+E_P=cste=2L^2(m+\frac{M}{3})\omega_0^2=2L^2(m+\frac{M}{3})\omega^2(t)+(M+2m)gL(1-\cos\theta)$; alors :

$$\boxed{\omega^2(t)=\omega_0^2-\frac{2m+M}{2(m+M/3)}\times\frac{g}{L}(1-\cos\theta)}$$

• Le mouvement est pendulaire si θ_M (défini par $\omega=0$) existe; il vient donc :

$$\cos\theta_M=1-\frac{2(m+M/3)}{2m+M}\times\frac{L\omega_0^2}{g} \quad \text{ou bien :} \quad \boxed{\cos\theta_M=1-\frac{m^2}{2(2m+M)(m+M/3)}\times\frac{v_0^2}{gL}}$$

θ_M est défini si : $-1 \leq \cos\theta_M \leq 1 \Rightarrow 1 - \dfrac{m^2}{2(2m+M)(m+M/3)} \times \dfrac{v_0^2}{gL} \geq -1$; pour cela, il faut que v_0 soit inférieure à une valeur seuil, notée v_{0S}, telle que :

$$\boxed{v_{0S} = 2\sqrt{gL} \times \sqrt{\frac{(2m+M)(m+M/3)}{m^2}}}$$

Rq : pour $v_0 \succ v_{0S}$, le mouvement du système pour $t \geq 0$ est donc **révolutif**.